

Université Mohammed V de Rabat
École Nationale Supérieure d'Informatique et d'Analyse des Systèmes

Concours DUT / DEUG-DEUST — ENSIAS

Épreuve de Mathématiques | Durée : 2H 30

Année 2023–2024

Cet examen est composé de 3 parties. Les Parties I et II sont communes aux deux concours.

Partie I

On considère la fonction d'une variable réelle :

$$f : x \mapsto \int_0^x \frac{e^t}{1+t} dt$$

I.A.

I.A.1. Déterminer l'ensemble de définition de f .

I.A.2. Étudier les variations de f sur cet ensemble.

I.A.3. Après avoir minoré $f(x)$ sur l'intervalle $]1, 0]$, déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers -1 par valeurs supérieures.

I.A.4. Étudier la branche infinie au voisinage de $+\infty$ de la courbe représentant f .

I.B. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les réels $x_k = \frac{k}{n}$. On pose :

$$y_k = \frac{k}{n} \left(\frac{1}{2n} + \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{e^{\frac{i}{n}}}{n+i} \right) + \frac{e^{\frac{k}{n}}}{2(n+k)} \right)$$

Montrer que y_k est une approximation de $f(x_k)$, en utilisant la méthode des trapèzes.

I.C.

I.C.1. Montrer qu'il existe une suite réelle $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k x^k + o(x^n) \quad \text{au voisinage de } 0.$$

I.C.2. Calculer ce développement limité pour $n = 5$.

I.C.3. Pour $n \geq 2$, exprimer λ_n en fonction de n .

I.C.4. Établir que pour $n \geq 1$, une expression de λ_{n+1} en fonction de n et λ_n .

Partie II

On considère l'équation différentielle :

$$(1+x)y' = xy$$

On note φ la solution de cette équation sur l'intervalle $[0, +\infty[$ vérifiant $\varphi(0) = 1$.

II.A.

II.A.1. Justifier (sans calcul) l'existence et l'unicité de φ .

II.A.2. Calculer explicitement $\varphi(x)$.

II.B. Pour montrer que φ est développable en série entière au voisinage de 0, on suppose d'abord qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et un intervalle ouvert I contenant 0 tels que :

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{pour tout } x \in I.$$

II.B.1. Montrer, à l'aide de l'équation différentielle $(1+x)y' = xy$, que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence suivante :

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n a_n + (n+1) a_{n+1} - a_{n-1} = 0.$$

II.B.2. À partir de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on pose $b_n = a_n + a_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

Démontrer que b_n vérifie la relation $b_{n+1} = \frac{b_n}{n+1}$.

II.B.3. En déduire, sous forme d'une somme, une expression de a_n en fonction de n pour tout $n \geq 2$.

II.B.4. Si la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est celle définie en I.C.1), démontrer la relation :

$$\lambda_n = \frac{a_{n-2}}{n-1} \quad \text{pour tout } n \geq 2.$$

II.C. On note E l'ensemble des suites réelles $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (n+1)u_{n+1} + n u_n - u_{n-1} = 0.$$

II.C.1. Montrer que E , muni des opérations usuelles sur les suites réelles, forme un espace vectoriel réel.

II.C.2. Montrer que E est un espace vectoriel de dimension 2.

II.C.3. Déterminer l'ensemble des suites géométriques contenues dans E .

II.C.4. En utilisant la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de II.B.1), déterminer une base de E et en déduire, pour toute suite $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de E , une expression de u_n en fonction de u_0 , u_1 et n .

II.C.5. En utilisant la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de II.C.4), déterminer une base de E et en déduire pour toute suite $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de E une expression de u_n en fonction de u_0 , u_1 et n .

Partie III (Concours DUT)

On considère l'équation différentielle suivante :

$$x(x+1)y'' - x(x^2+2x+2)y' + (x^2+2x+2)y = 0 \quad (E)$$

III.A.

III.A.1. Montrer que, si l'équation (E) admet des solutions polynomiales non nulles, elles ne peuvent être que de degré 1.

III.A.2. Déterminer toutes les solutions polynomiales de (E) (indication : méthode de variation de la constante).

III.B. À l'aide d'une des solutions trouvées en III.A.2), montrer que la résolution de (E) , sur $\mathbb{R}^*$, se ramène à la résolution de l'équation différentielle :

$$(1+x)y' = xy$$

étudiée dans la Partie II. En déduire le rapport avec la Partie I.

Partie III (Concours DEUG/DEUST)

On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n , et $B = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ sa base canonique.

Étant donnée une famille de $(n+1)$ réels distincts $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$, on leur associe les polynômes $L_0, L_1, L_2, \dots, L_n$ de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que :

$$\begin{cases} \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{i\}, & L_i(a_j) = 0 \\ L_i(a_i) = 1. \end{cases}$$

1) On prend $n = 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.

a) Donner L_0, L_1, L_2 .

b) Montrer que (L_0, L_1, L_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

c) Quelles sont les composantes d'un polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ dans la base (L_0, L_1, L_2) ?

2) Former la matrice de changement de base de $B = (1, X, X^2)$ à $B' = (L_0, L_1, L_2)$.

3) Déterminer les polynômes P de $\mathbb{R}_2[X]$ tels que :

$$P(X) = P(0) + P(1)X + P(2)X^2.$$

Bonne chance !